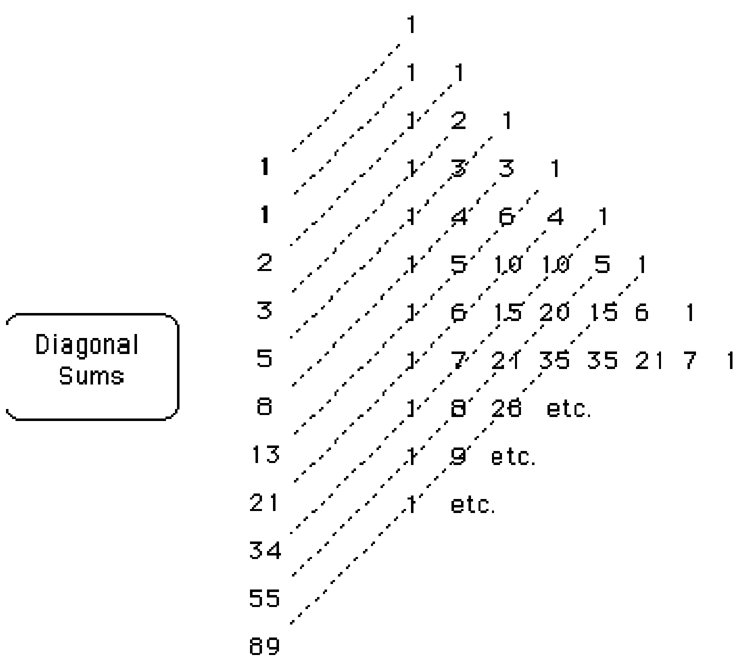
Prof. Dr. Alfred Toth

Fibonacci-Zahlen, Pascalsche Diagonalsummen und Trichotomienwechsel

1. Die folgende Graphik, die ich einer Studierenden von mir verdanke, die sie jedoch ihrerseits einer anderen Quelle entnahm, die nicht mehr rekonstruierbar scheint, gibt den Zusammenhang zwischen Diagonalzahlen im Pascalschen Dreieck und den Fibonacci-Zahlen (ohne die 0) an:



2. Anderseits stehen, wie ich bereits in Toth (2007, S. 186 ff.) gezeigt hatte, die Zahklen des Pascalschen Dreiecks, d.h. die sog. figurativen Zahlen,in direktem Zusammenhang mit dem Phänomen des Trichotomienwechsels in n-wertigen Semiotiken mit n ≥ 4, genauer: sie geben den Anfang, das Ende und somit die Länge von Trichotomien an. Ich hoffe, dass die Verkleinerungen aus meinem Buch „Zwischen den Kontexturen“ noch lesbar sind, ansonsten sei auf die Originalpublikation verwiesen.

3. Strukturen der pentadischen, hexadischen und n-adischen Semiotik

Wieviel Raum die Darstellung höherwertiger Semiotiken für $n > 4$ einnehmen würde, läßt sich daran ermessen, daß schon die pentadische Semiotik 126 und die hexadische 462 Zeichenklassen zu ihrer Darstellung benötigen. Wenn man sich nun die Zahlen 10, 35, 126, 462 anschaut, die den Anzahlen der Zeichenklassen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotik entsprechen, so fällt auf, daß es sich hier um 2-, 3-, 4- und 5-dimensionale Zahlen handelt, die eine Teilmenge der figurativen Zahlen bilden, worunter man bekanntlich natürliche Zahlen versteht, die "Anzahlen von Punkten darstellen, welche gleichmäßig auf den Ecken, den Seiten und im Innern von regelmäßigen ebenen oder räumlichen Figuren verteilt sind" (Flachsmeyer 1969: 74). Figurative Zahlen entstehen "durch fortschreitendes Summieren der Glieder einer arithmetischen Reihe" (Bischoff 1997: 179). Mehrdimensionale Zahlen lassen sich am einfachsten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks darstellen:

1	1	1	1	1	1	1	1	.1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	.9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Während die erste Zeile und Spalte aus Einserfolgen besteht, finden wir in der zweiten Zeile und Spalte die Folge der natürlichen Zahlen, also die eindimensionalen Zahlen. In der dritten Zeile und Spalte stehen die zweidimensionalen Dreieckszahlen, in der vierten die dreidimensionalen Tetraederzahlen, in der fünften die vierdimensionalen Zahlen, in der sechsten die fünfdimensionalen Zahlen, usw. Diese lassen sich nicht nur aus dem Pascalschen Dreieck ablesen, sondern auch durch einfache Formeln berechnen:

Dreieckszahlen:	1, 3, 6, **10**, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … $\frac{1}{2} n (n + 1)$
Tetraederzahlen:	1, 4, 10, 20, **35**, 56, 84, 120, 165, 220, … $1/6\, n (n + 1) (n + 2)$
4-dimensionale Zahlen:	1, 5, 15, 35, 70, **126**, 210, 330, 495, 715, … $1/24\, n (n + 1) (n + 2) (n + 3)$
5-dimensionale Zahlen:	1, 6, 21, 56, 126, 252, **462**, 792, 1287, 2002, … $1/120\, n (n + 1) (n + 2) (n + 3) (n + 4)$

Die in der obigen Darstellung fett markierten Zahlen sind also zugleich die Anzahlen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotiken. Damit korrespondieren also zweidimensionale Zahlen mit der triadischen Semiotik, dreidimensionale mit der tetradischen Semiotik ..., allgemein: n-dimensionale Zahlen mit der n+1-dimensionalen Semiotik, und zwar gibt offenbar die n+2-te n-dimensionale Zahl einer n+1-adischen Semiotik die Anzahl derer Zkl×Rth an.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang ergibt sich zwischen den mehrdimensionalen Zahlen und den Anzahlen der Trichotomien eines vollständigen triadischen, tetradischen, pentadischen, hexadischen, ... n-adischen Dualsystems. Wie wir gesehen haben, findet in der triadischen Semiotik Trichotomienwechsel zwischen der 6. und der 7. sowie zwischen der 9. und 10. Zkl×Rth statt. Die 10 triadischen Zkln×Rthn unterteilen sich also in 3 Trichotomien, und zwar in eine mit 6 Zkln×Rth, in eine mit 3 Zkln×Rthn und in eine mit 1 Zkl×Rth. In der tetradischen Semiotik findet Trichotomienwechsel zwischen der 20. und der 21., zwischen der 30. und der 31. und zwischen der 34. und der 35. Zkl×Rth statt. Die 35 tetradischen Zkl×Rth unterteilen sich somit in 4 Trichotomien, und zwar in eine mit 20 Zkl×Rth, in eine mit 10, in eine mit 4 und in eine mit 1 Zkl×Rth. Stellen wir diese Anzahlen mit den entsprechenden Anzahlen in der pentadischen und hexadischen Semiotik zusammen:

Triadische Semiotik: 3 Trichotomien; Anzahlen: 6, **3**, 1

Tetradische Semiotik: 4 Trichotomien; Anzahlen: 20, 10, **4**, 1

Pentadische Semiotik: 5 Trichotomien; Anzahlen: 70, 35, 15, **5**, 1

Hexadische Semiotik: 6 Trichotomien; Anzahlen: 252, 126, 56, 21, **6**, 1

Wie man leicht erkennt, sind die Anzahlen der Trichotomien der ersten n für $n \leq 6$ wieder die ersten n-dimensionalen Zahlen für $n \leq 5$, nur in umgekehrter Reihenfolge. Offenbar gibt also die jeweils zweite n-dimensionale Zahl die Anzahl der Trichotomien einer n+1-adischen Semiotik an. Damit kann man nun auch die Orte der Trichotomienwechsel auf einfache Weise bestimmen: Man subtrahiert von der n-ten Zahl nacheinander zuerst die erste Zahl, dann die Summe aus der ersten und zweiten Zahl, dann diejenige aus der ersten, zweiten und dritten Zahl ..., nicht aber die Summe der ersten und der n–1ten Zahl, da diese Differenz 0 beträgt und trivialerweise der Anfang eines semiotischen Dualsystems kennzeichnet.

Mit diesen Ergenissen vgl. man diejenigen zwischen Fibonacci- und Peirce-Zahlen einerseits (Toth 2010a) sowie zwischen zwei neu entdeckten semiotischen Zahlen, den Stufenzahlen und dem Reflexionsüberschuss.

Bibliographie

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Fibonacci-Zahlen und Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010a (erscheint)

Toth, Alfred, Stufenzahlen und Relationsüberschuss. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b (erscheint)

20.9.2010